

# MATEMATİK ÖABT: TÜREV VE İNTEGRAL

**Öğrenme Hedefi:** Türev ve integral kavramlarını, temel teoremleri ve uygulama alanlarını (extremum, alan, hacim vb.) ÖABT düzeyinde analiz edebilme.

## BÖLÜM 1: TÜREVİN TANIMI VE KURALLARI

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

1.  $f(x) = |x^2 - 4|$  fonksiyonunun  $x = 2$  noktasındaki sağdan türevi ( $f'(2^+)$ ) kaçtır?

- a) -4
- b) 0
- c) 4
- d) Yoktur (Türevsiz)
- e) 1

**Cevap: C**

$x=2$  noktasında mutlak değer için  $x > 2$  kabul edilir. Bu durumda  $|x^2 - 4| = x^2 - 4$  olur.  $f'(x) = 2x$  türevi alınır ve  $x=2$  yazılırsa  $f'(2^+) = 2(2) = 4$  bulunur. Sol türev ise  $-4$ 'tür.

2.  $f(x) = e^{\Lambda \sin(x)}$  olduğuna göre,  $f'(\pi)$  değeri kaçtır?

- a) 0
- b) 1
- c) e
- d) -1
- e) -e

**Cevap: D**

Bileşke fonksiyon türevi (zincir kuralı) uygulanır:  $f'(x) = (\sin x)^{\Lambda} * e^{\Lambda \sin(x)} = \cos x * e^{\Lambda \sin(x)}$ .  $x = \pi$  için  $f'(\pi) = \cos(\pi) * e^{\Lambda \sin(\pi)} = -1 * e^{\Lambda 0} = -1$  bulunur.

muratvuranlar.com

3.  $x = t^2 + 1$  ve  $y = t^3 + t$  parametrik denklemleri için  $t = 1$  anındaki  $dy/dx$  değeri kaçtır?

- a) 1
- b) 2
- c) 3/2
- d) 2/3
- e) 4/3

**Cevap: B**

Parametrik türev formülü:  $dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt)$ .  $dy/dt = 3t^2 + 1$  ve  $dx/dt = 2t$ .  $t=1$  değerleri yerine yazılırsa:  $(3(1)^2 + 1) / (2*1) = 4/2 = 2$  elde edilir.

4.  $x^2 + y^2 = 25$  eğrisinin  $(3, -4)$  noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

- a) 3/4
- b) -3/4
- c) 4/3
- d) -4/3
- e) 1/2

**Cevap: A**

Kapalı türev alınır:  $2x + 2yy' = 0$  elde edilir. Buradan  $y' = -x/y$  bulunur.  $(3, -4)$  noktası yerine yazıldığında eğim  $m = -3 / (-4) = 3/4$  olur.

# MATEMATİK ÖABT: TÜREV VE İNTEGRAL (SORU 5-8)

## BÖLÜM 2: TÜREV UYGULAMALARI VE L'HOPITAL

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

5.  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  fonksiyonunun  $x = 2$  noktasındaki teğet denklemi nedir?

- a)  $y = 9x - 14$
- b)  $y = 9x + 4$
- c)  $y = 3x - 2$
- d)  $y = 9x - 18$
- e)  $y = x + 4$

**Cevap: A**

1. Nokta:  $f(2) = 2^3 - 3(2) + 2 = 4$ . Nokta (2, 4).
2. Eğim:  $f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(2) = 9$ .
3. Denklem:  $y - 4 = 9(x - 2)$  düzenlenirse  $y = 9x - 14$  bulunur.

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} [(1 - \cos x) / x^2]$  limitinin değeri kaçtır?

- a) 0
- b) 1/2
- c) 1
- d) 2
- e) Belirsiz

**Cevap: B**

$x=0$  için 0/0 belirsizliği vardır. L'Hopital uygulanırsa:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x / 2x)$  elde edilir. Tekrar uygulanırsa  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x / 2)$  olur.  $x=0$  için  $\cos(0)/2 = 1/2$  bulunur.

7.  $f(x) = 1/x$  fonksiyonunun 10. mertebeden türevi  $f^{(10)}(x)$  aşağıdakilerden hangisidir?

- a)  $10! / x^{10}$
- b)  $-10! / x^{11}$
- c)  $10! / x^{11}$
- d)  $-10! / x^{10}$
- e)  $1 / x^{11}$

**Cevap: C**

$f(x) = x^{-1}$  için türevler:  $f' = -x^{-2}$ ,  $f'' = 2x^{-3}$ ,  $f''' = -6x^{-4}$ ... Genel kural  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$  şeklindedir.  $n=10$  için  $(-1)^{10} \cdot 10! / x^{11} = 10! / x^{11}$  bulunur.

8.  $f(x) = \ln(x)$  fonksiyonuna  $[1, e]$  aralığında Ortalama Değer Teoremi uygulandığında elde edilen 'c' sayısı kaçtır?

- a)  $e - 1$
- b)  $1 / (e - 1)$
- c)  $\ln(e-1)$
- d)  $e / 2$
- e)  $1 / e$

**Cevap: A**

Teoreme göre  $f'(c) = [f(e) - f(1)] / (e - 1)$  olmalıdır.  $1/c = [\ln(e) - \ln(1)] / (e - 1) = 1 / (e - 1)$ . Buradan  $c = e - 1$  bulunur. Bu değer (1, e) aralığındadır.

# MATEMATİK ÖABT: TÜREV VE İNTEGRAL (SORU 9-12)

## BÖLÜM 3: EXTREMUM VE ANALİZ

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

9.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi kaçtır?

- a) 1
- b) 3
- c) 0
- d) 2
- e) -1

**Cevap: A**

$f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ . Kökler 1 ve 3. İşaret tablosunda (+ - +) dizilimi olur. Artanlıktan azalanlığa geçilen  $x=1$  noktası yerel maksimumdur.

10. Çevresi 24 birim olan bir dikdörtgenin alanının maksimum olması için bir kenarı kaç birim olmalıdır?

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 12
- e) 5

**Cevap: B**

Çevre  $2(a+b)=24$  ise  $a+b=12$ 'dir. Alan  $A = a*b = a(12-a) = 12a - a^2$ . Türev alınırsa  $A' = 12 - 2a = 0$ 'dan  $a=6$  bulunur. Maksimum alan için şekil kare olmalıdır.

muratvuranlar.com

11.  $f(x) = x^4 - 2x^3$  fonksiyonunun büküm (dönüm) noktalarından birinin apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 0
- b) 1/2
- c) 1
- d) 2/3
- e) 3/2

**Cevap: C**

Büküm noktası için  $f'(x)=0$  olmalı.  $f'(x)=4x^3-6x^2$ ,  $f'(x)=12x^2-12x = 12x(x-1)$ .  $x=0$  ve  $x=1$  köklerdir ve her ikisinde de işaret değiştiği için büküm noktalarıdır.

12.  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  fonksiyonu için  $(f^{-1})'(4)$  değeri kaçtır? (Not:  $f(1)=4$ )

- a) 1/5
- b) 1/4
- c) 1/3
- d) 1/2
- e) 1/10

**Cevap: A**

Formül:  $(f^{-1})'(y_0) = 1 / f'(x_0)$ . Burada  $y_0=4$  ise  $f(x_0)=4$  denklemini çözümler.  $f(1)=4$  olduğundan  $x_0=1$ 'dir.  $f'(x)=3x^2+2$  ve  $f'(1)=5$  olduğundan sonuç  $1/5$ 'tir.

# MATEMATİK ÖABT: TÜREV VE İNTEGRAL (SORU 13-16)

BÖLÜM 4: BELİRSİZ İNTEGRAL VE YÖNTEMLER

GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

GÜVEN (1-5)

13.  $\int (e^{\Lambda x} + 1/x + \sin x) dx$  integralinin sonucu nedir?

- a)  $e^{\Lambda x} + \ln|x| - \cos x + C$
- b)  $e^{\Lambda x} - \ln|x| + \cos x + C$
- c)  $e^{\Lambda x} + \ln x + \cos x + C$
- d)  $e^{\Lambda x} + 1/x^2 - \cos x + C$
- e)  $e^{\Lambda x} + \ln|x| + \sin x + C$

**Cevap: A**

İntegraller ayrı ayrı hesaplanır:

$$\int e^{\Lambda x} dx = e^{\Lambda x}$$

$$\int 1/x dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

Hepsini toplarsak:  $e^{\Lambda x} + \ln|x| - \cos x + C$  elde edilir.

14.  $\int [x / (x^2 + 1)] dx$  integralinin sonucu nedir?

- a)  $\ln(x^2 + 1) + C$
- b)  $(1/2)\ln(x^2 + 1) + C$
- c)  $\arctan x + C$
- d)  $2\ln(x^2 + 1) + C$
- e)  $x^2 / 2 + C$

**Cevap: B**

$u = x^2 + 1$  dönüşümü yapılırsa  $du = 2x dx$  olur.  $x dx = du/2$  olur. İntegral:  $\int (1/2) * (1/u) du = (1/2) \ln|u| + C = (1/2) \ln(x^2 + 1) + C$  şeklinde çözülür.

muratvuranlar.com

15.  $\int x * \cos(x) dx$  integralinin sonucu nedir?

- a)  $x \sin x + \cos x + C$
- b)  $x \cos x - \sin x + C$
- c)  $x \sin x - \cos x + C$
- d)  $-x \sin x + \cos x + C$
- e)  $x^2 \sin x + C$

**Cevap: A**

Kısmi integrasyon (LAPTÜ) uygulanır:  $u = x, dv = \cos x dx$  olsun.  $du = dx, v = \sin x$  olur. Formül  $\int u dv = uv - \int v du$ 'dan:  $x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$ .

16.  $\int \sin(x) * \cos(x) dx$  integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- a)  $(1/2)\tan x + C$
- b)  $-(1/2)\cot x + C$
- c)  $\tan x + C$
- d)  $(1/2)\sin^2 x + C$
- e)  $-\cos^2 x + C$

**Cevap: D**

$u = \sin x$  dönüşümü yapılırsa  $du = \cos x dx$  olur. İntegral  $\int u du = u^2/2 + C$  haline gelir. Buradan  $(1/2)\sin^2 x + C$  sonucu elde edilir.

# MATEMATİK ÖABT: TÜREV VE İNTEGRAL (SORU 17-20)

## BÖLÜM 5: BELİRLİ İNTEGRAL

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

17.  $\int_{[0, 2]} (x^2 + 1) dx$  belirli integralinin değeri kaçtır?

- a) 14/3
- b) 16/3
- c) 4/3
- d) 2/3
- e) 6/3

**Cevap: A**

Belirsiz integral:  $\int (x^2+1)dx = x^3/3 + x$ . Sınırlar yerine yazılır:  
 $(2^3/3 + 2) - (0^3/3 + 0) = (8/3 + 2) = 14/3$  bulunur.

18.  $\int_{[-\pi, \pi]} x^2 * \cos(x) dx$  integralinin sonucu nedir?

- a) 0
- b)  $2\pi$
- c) 1
- d) -1
- e)  $\pi/2$

**Cevap: A**

$x^2$  tek fonksiyondur,  $\cos x$  çift fonksiyondur. Tek \* Çift = Tek fonksiyondur. Tek fonksiyonların simetrik  $[-a, a]$  aralığındaki belirli integrali her zaman 0'dır.

muratvuranlar.com

19.  $\int_{[0, 2]} |x - 1| dx$  belirli integralinin değeri kaçtır?

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 8
- e) 0.5

**Cevap: A**

Mutlak değer için  $x=1$ 'de işaret değiştirir. Integral ikiye bölünür:  $\int_{[0,1]} (1-x)dx + \int_{[1,2]} (x-1)dx$ . Hesaplandığında  $0.5 + 0.5 = 1$  elde edilir.

20.  $F(x) = \int_{[0, x^2]} \cos(t) dt$  ise  $F'(x)$  türevi nedir?

- a)  $\cos(x^2) * 2x$
- b)  $-\cos(x^2) * 2x$
- c)  $\sin(x^2)$
- d)  $\cos(x)$
- e)  $2x * \sin(x^2)$

**Cevap: A**

Leibniz integral türevi kuralına göre:  $F'(x) = f(\text{üst sınır}) * (\text{üst sınır türevi}) - f(\text{alt sınır}) * (\text{alt sınır türevi})$ .  $F'(x) = \cos(x^2) * (2x) - \cos(0) * 0 = 2x * \cos(x^2)$ .

# MATEMATİK ÖABT: TÜREV VE İNTEGRAL (SORU 21-24)

## BÖLÜM 6: İNTEGRALİN GEOMETRİK UYGULAMALARI

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

21.  $y = \sqrt{x}$  eğrisi ile  $y = x$  doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- a)  $4/3$
- b)  $2/3$
- c)  $1/3$
- d)  $1/6$
- e)  $8/3$

**Cevap: D**

Eğriler  $x=0$  ve  $x=1$  noktalarında kesişir.  $[0,1]$  aralığında  $\sqrt{x} > x$ 'dir. Alan =  $\int_{[0,1]} (\sqrt{x} - x) dx = [2/3 x^{3/2} - x^2/2]$  sınırları yerine yazılırsa:  $2/3 - 1/2 = 1/6$  bulunur.

22.  $y = x^2$  eğrisinin  $[0, 1]$  aralığındaki parçasının  $x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç  $\pi$  birimküptür?

- a)  $\pi/5$
- b)  $\pi/4$
- c)  $\pi/3$
- d)  $\pi/2$
- e)  $2\pi/5$

**Cevap: A**

Dönel cisim hacim formülü:  $V = \pi \int_{[a,b]} [f(x)]^2 dx$ .  $V = \pi \int_{[0,1]} (x^2)^2 dx = \pi \int_{[0,1]} x^4 dx$ . Sonuç  $\pi * [x^5/5] = \pi/5$  birimküp olarak bulunur.

muratvuranlar.com

23.  $f(x) = x$  fonksiyonunun  $[0, e^2 - 1]$  aralığındaki ortalama değeri nedir?

- a)  $e^2 - 1$
- b)  $(e^2 - 1) / 2$
- c)  $e^2 / 2$
- d)  $1 / 2$
- e)  $e - 1$

**Cevap: B**

Ortalama Değer =  $[1/(b-a)] * \int_{[a,b]} f(x) dx$ .  $[1/(e^2-1)] * \int_{[0, e^2-1]} x dx = [1/(e^2-1)] * [(e^2-1)^2 / 2] = (e^2-1) / 2$  bulunur.

24.  $\int [1/(x^2 - 1)] dx$  integralinin çözümü nedir?

- a)  $\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$
- b)  $\ln|(x-1)/(x+1)| + C$
- c)  $(1/2)\ln|(x-1)/(x+1)| + C$
- d)  $\arctan x + C$
- e)  $\ln|x^2-1| + C$

**Cevap: C**

Basit kesirlere ayırma uygulanır:  $1/(x^2-1) = [1/2] / (x-1) - [1/2] / (x+1)$ . Integral alındığında  $(1/2)\ln|x-1| - (1/2)\ln|x+1| + C$  elde edilir. Logaritma özelliğiyle:  $(1/2)\ln|(x-1)/(x+1)| + C$  olur.

# MATEMATİK ÖABT: TÜREV VE İNTEGRAL (FİNAL)

BÖLÜM 7: GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

GÜVEN (1-5)

25.  $\int_{[0, \infty]} e^{-2x} dx$  genelleştirilmiş integralinin değeri nedir?

- a)  $1/3$
- b)  $1/2$
- c)  $1$
- d) İraksak ( $\infty$ )
- e)  $0$

**Cevap: B**

Limit tanımı kullanılır:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, t]} e^{-2x} dx$ . Belirsiz integral  $-1/2 * e^{-2x}$  şeklindedir. Sınırlar yazıldığında:  $\lim_{t \rightarrow \infty} [-1/2 * (e^{-2t} - e^0)] = -1/2 * (0 - 1) = 1/2$  bulunur. Integral yakınsaktır.

muratvuranlar.com