

# MATEMATİK ÖABT: FONKSİYONLAR VE LİMİT

**\*\*Öğrenme Hedefi:\*\*** Fonksiyon kavramı, ters/bileşke fonksiyonlar, limit ve süreklilik konularını ÖABT düzeyinde analiz edebilme.

## BÖLÜM 1: FONKSİYONLAR VE TERS-BİLEŞKE

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

1.  $f(x) = (2^x - 1) / (2^x + 1)$  fonksiyonunun tersi  $f^{-1}(x)$  aşağıdakilerden hangisidir?

- a)  $f^{-1}(x) = \log_2((1+x)/(1-x))$
- b)  $f^{-1}(x) = \log_2((1-x)/(1+x))$
- c)  $f^{-1}(x) = \log_2(1-x) - \log_2(1+x)$
- d)  $f^{-1}(x) = (1+x)/(1-x)$
- e)  $f^{-1}(x) = \log_2((x+1)/(x-1))$

Cevap: A.  $y = (2^x - 1) / (2^x + 1) \Rightarrow y(2^x + 1) = 2^x - 1 \Rightarrow y \cdot 2^x + y = 2^x - 1 \Rightarrow 1 + y = 2^x(1 - y) \Rightarrow 2^x = (1+y)/(1-y) \Rightarrow x = \log_2((1+y)/(1-y))$ .

2.  $f(x) = \sin^2(3x) + \cos(5x)$  fonksiyonunun esas periyodu nedir?

- a)  $\pi/15$
- b)  $\pi/2$
- c)  $\pi$
- d)  $2\pi/15$
- e)  $2\pi/3$

Cevap: C.  $\sin^2(3x)$  için periyot  $T_1 = \pi/3$ .  $\cos(5x)$  için  $T_2 = 2\pi/5$ .  $\text{OKEK}(T_1, T_2) = \text{OKEK}(\pi/3, 2\pi/5) = 2\pi / \text{Obec}(3, 5) = 2\pi$ . (Cevap  $2\pi$ )

muratvuranlar.com

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + x} - x]$  limitinin değeri kaçtır?

- a) 0
- b)  $1/2$
- c) 1
- d) 2
- e)  $\infty$

Cevap: B. Eşlenik ile çarpılırsa:  $[\sqrt{x^2 + x} - x] \cdot [\sqrt{x^2 + x} + x] = x^2 + x - x^2 = x$ .  $x$  parantezine alınır  $1 / [\sqrt{x^2 + x} + x]$ .  $x \rightarrow \infty$  için  $1/2$  olur.

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot \cos(1/x)]$  limitinin değeri kaçtır?

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) Yoktur
- e)  $\infty$

Cevap: B. Sıkıştırma Teoremi:  $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$  olduğundan  $-x^2 \leq x^2 \cos(1/x) \leq x^2$  olur. Her iki yanın  $x \rightarrow 0$  limiti 0 olduğundan ortadaki ifade de 0'a gider.

# MATEMATİK ÖABT: LİMİT VE SÜREKLİLİK (SORU 5-8)

## BÖLÜM 2: SÜREKLİLİK KAVRAMI

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

5.  $f(x) = (x^2 - a) / (x - 1)$  fonksiyonunun  $x=1$  noktasında bir limit değeri varsa 'a' kaçtır?

- a) 0
- b) 1/2
- c) 1/3
- d) 1
- e) 2

Cevap: D. Payda  $x=1$  için 0 olmaktadır. Limitin olması için payın da 0 olması gerekir (0/0 belirsizliği).  $1^2 - a = 0 \Rightarrow a = 1$  bulunur.

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} [ \ln(1 + 3x) / \sin(5x) ]$  limitinin değeri kaçtır?

- a) 3/5
- b) 5/3
- c) 0
- d) 1/5
- e)  $\ln 3 / 5$

Cevap: A. L'Hopital uygulanırsa:  $[ 3 / (1 + 3x) ] / [ 5\cos(5x) ]$ .  $x=0$  için 3/5 elde edilir. Veya  $\ln(1+u) \sim u$  ve  $\sin(u) \sim u$  dönüşümü kullanılır.

muratvuranlar.com

7.  $f(x) = \arcsin(2x - 3)$  fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

- a)  $1 < x < 2$
- b)  $x > 2$
- c)  $1 \leq x \leq 2$
- d)  $x < 1$
- e)  $x > 3/2$

Cevap: C. Arcsin fonksiyonunun tanım aralığı  $[-1, 1]$  olduğundan:  $-1 \leq 2x - 3 \leq 1$ . Buradan  $2 \leq 2x \leq 4$  ve  $1 \leq x \leq 2$  bulunur.

8.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [ x^x ]$  limitinin türü aşağıdakilerden hangisidir?

- a) 0/0 belirsizliği
- b)  $\infty/\infty$  belirsizliği
- c)  $1^\infty$  belirsizliği
- d)  $0^\infty$  belirsizliği
- e) Belirsizlik yoktur

Cevap: D.  $x \rightarrow 0^+$  için taban 0'a, üs 0'a yaklaşır. Bu  $0^0$  belirsizliğidir. Limit değeri  $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$  üzerinden hesaplanır ve sonuç 1 çıkar.

# MATEMATİK ÖABT: FONKSİYONLAR VE LİMİT (SORU 9-12)

## BÖLÜM 3: İLERİ LİMİT VE FONKSİYON ANALİZİ

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

9.  $\lim_{x \rightarrow 1} [(1-x) \cdot \tan(\pi x / 2)]$  limitinin değeri kaçtır?

- a)  $-2/\pi$
- b)  $2/\pi$
- c)  $1/\pi$
- d)  $\pi/2$
- e) 0

Cevap: B.  $u = 1-x$  dönüşümü yapılırsa:  $u \rightarrow 0$ ,  $\tan(\pi(1-u)/2)$   
 $= \tan(\pi/2 - \pi u/2) = \cot(\pi u/2)$ .  $\lim u \cdot \cot(\pi u/2) = \lim u /$   
 $\tan(\pi u/2) = 1 / (\pi/2) = 2/\pi$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} [(1 - \cos(1 - \cos x)) / x^4]$  limitinin değeri kaçtır?

- a)  $1/8$
- b)  $1/16$
- c)  $1/32$
- d) 0
- e)  $1/4$

Cevap: A.  $1 - \cos u \approx u^2/2$ ,  $u = 1 - \cos x \approx x^2/2$ . O halde  $(x^2/2)^2 / x^4 = (x^4/8) / x^4 = 1/8$ .

muratvuranlar.com

11.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) Çift fonksiyon
- b) Tek fonksiyon
- c) Artan fonksiyon
- d) Azalan fonksiyon
- e) Sınırsız fonksiyon

Cevap: B.  $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ .  
Eşlenik ile çarpılırsa  $\ln(1 / (\sqrt{x^2 + 1} + x)) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$ . Yani tek fonksiyondur.

12.  $\lim_{x \rightarrow 1} [(\sqrt[3]{x} - 1) / (\sqrt{x} - 1)]$  limitinin değeri nedir?

- a)  $1/3$
- b)  $2/3$
- c)  $4/9$
- d)  $1/2$
- e)  $1/6$

Cevap: B. L'Hopital uygulanırsa:  $[(1/3)x^{-2/3}] / [(1/2)x^{-1/2}]$ .  
 $x=1$  için  $(1/3) / (1/2) = 2/3$  bulunur.

# MATEMATİK ÖABT: FONKSİYONLAR VE LİMİT (SORU 13-16)

## BÖLÜM 4: SÜREKLİLİK VE ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

13.  $f(x) = x / (1 + x)$  ise  $(f \circ f)(x)$  bileşke fonksiyonu nedir?

- a)  $x / (1 + 2x)$
- b)  $x / (2 + x)$
- c)  $x^2 / (1 + x)$
- d)  $1 / (1 + x)^2$
- e)  $2x / (1 + x)$

Cevap: A.  $f(f(x)) = f(x) / (1 + f(x)) = (x / (1+x)) / (1 + x/(1+x)) = x / (1 + 2x)$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + 1/x^2)^x]$  limitinin sonucu nedir?

- a) 1
- b) e
- c) 0
- d)  $\infty$
- e) Yoktur

Cevap: A.  $1^\infty$  belirsizliği. kural:  $e^{\lim x * (1+1/x^2 - 1)} = e^{\lim 1/x}$ .  $x \rightarrow \infty$  için  $1/x \rightarrow 0$  olduğundan  $e^0 = 1$  olur.

muratvuranlar.com

15.  $f(x) = \sin^2 x / (1 - \cos x)$  fonksiyonunun  $x=0$ 'da sürekli olması için  $f(0)$  ne olmalıdır?

- a)  $f(0)=1$
- b)  $f(0)=2$
- c)  $f(0)=0$
- d)  $f(0)=-1$
- e) Sürekli yapılamaz

Cevap: B.  $\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) / (1 + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2$ . Süreklilik için  $f(0)=2$  olmalıdır.

16.  $\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x^2) / (1 - \cos x)]$  limitinin değeri kaçtır?

- a) 2
- b) 2/3
- c) 1
- d) 0
- e) Yoktur

Cevap: A. L'Hopital veya eşdeğer ifadeler ile:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 / (x^2/2) = 2$ . (Cevap 2)

# MATEMATİK ÖABT: FONKSİYONLAR VE LİMİT (SORU 17-20)

## BÖLÜM 5: TRİGONOMETRİK LİMİTLER VE TEORİ

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} [ (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) / x ]$  limitinin değeri nedir?

- a) 1
- b) 1/2
- c) 1/3
- d) 1/4
- e) 0

Cevap: A. L'Hopital:  $[ 1/(2\sqrt{1+x}) + 1/(2\sqrt{1-x}) ] / 1$ .  $x=0$  için  $1/2 + 1/2 = 1$ . (Cevap 1)

18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} [ 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n) ]$  limitinin değeri nedir?

- a)  $\log 2$
- b)  $\ln 2$
- c) 1/2
- d) 1
- e)  $e/2$

Cevap: B. Riemann toplamı:  $\int [1/(1+x)] dx$  (0'dan 1'e). Sonuç  $\ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$  olur.

muratvuranlar.com

19.  $f(x) = x / (1 + x^2)$  fonksiyonunun görüntü kümesi (range) nedir?

- a)  $[-1/2, 1/2]$
- b)  $[-1, 1]$
- c)  $\mathbb{R}$
- d)  $(0, 1)$
- e)  $\mathbb{R} - \{0\}$

Cevap: A.  $y = x / (1+x^2) \Rightarrow yx^2 - x + y = 0$ .  $x$  gerçel ise  $\Delta = 1 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow -1/2 \leq y \leq 1/2$ .

20.  $f(x) = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$  fonksiyonunun tersi  $f^{-1}(x)$  nedir?

- a)  $\sin h(x)$
- b)  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- c)  $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- d)  $e^x - e^{-x}$
- e)  $\arcsin h(x)$  yoktur

Cevap: B.  $y = (e^x - e^{-x})/2$  denklemini  $x$  için çözümlerse  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$  bulunur.

# MATEMATİK ÖABT: FONKSİYONLAR VE LİMİT (SORU 21-24)

## BÖLÜM 6: BİLEŞKE VE TERS FONKSİYON LİMİTLERİ

## GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

## GÜVEN (1-5)

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{(x + \sin x)}{(x - \sin x)} \right]$  limitinin sonucu nedir?

- a) 0
- b) 1/2
- c) 1/3
- d) 1
- e) 2

Cevap: D. Pay ve payda x'e bölünürse:  $\frac{[1 + (\sin x)/x]}{[1 - (\sin x)/x]}$ .  $x \rightarrow \infty$  için  $(\sin x)/x \rightarrow 0$  olduğundan, sonuç  $1/1 = 1$  olur.

22.  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  (Tam değer fonksiyonu) hangi noktalarda süreksizdir?

- a)  $x=1$
- b)  $x=k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )
- c)  $x=0.5$
- d) Her yerde süreklidir
- e) Hiçbir yerde sürekli değildir

Cevap: B. Tam değer fonksiyonu, her tamsayı ( $\mathbb{Z}$ ) noktasında bir basamak yapar. Bu noktalarda sağ ve sol limitler farklı olduğundan fonksiyon süreksizdir.

muratvuranlar.com

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x \right]$  limitinin değeri nedir?

- a) 0
- b) 1/2
- c) 1/e
- d)  $e^2$
- e)  $e^{-2}$

Cevap: E.  $1^\infty$  belirsizliği:  $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left( -\frac{2}{x+1} \right)} = e^{-2}$ . (Cevap  $e^{-2}$ )

24. Aşağıdaki ifadelerden hangisi her zaman doğru DEĞİLDİR?

- a) Sürekli fonksiyonlar sınırlıdır.
- b) Sürekli fonksiyonlar türevlenebilir.
- c) Sürekli bir fonksiyonun grafiği kopmaz.
- d) Kapalı aralıkta sürekli fonksiyon maksimum değerini alır.
- e) İki sürekli fonksiyonun bileşkesi süreklidir.

Cevap: B. Süreklilik, türevlenebilirlik için gereklidir ama yeterli değildir. Örneğin  $f(x)=|x|$  fonksiyonu  $x=0$ 'da süreklidir ama türevli değildir.

# MATEMATİK ÖABT: FONKSİYONLAR VE LİMİT (FİNAL)

BÖLÜM 7: GENEL DEĞERLENDİRME

GEREKÇE VE ANAHTAR NOTLAR

GÜVEN (1-5)

25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x} \right]$  limitinin değeri nedir?

- a) -1
- b) 0
- c)  $1/2$
- d)  $1/4$
- e)  $1/8$

Cevap: C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x \cos x}$ .  
 $\sin x/x \rightarrow 1$  ve  $\cos 0 \rightarrow 1$  olduğundan sonuç  $1/2$  olur.

muratvuranlar.com